CENGAGE

Matemáticas I

Patricia Ibáñez Carrasco

Matemáticas I

Matemáticas I

Patricia Ibáñez Carrasco

Universidad Tecnológica de Puebla
Centro Universitario CIFE
Instituto Latinoamericano para la
Comunicación Educativa (ILCE)

Revisión técnica:

Jesús García Barrera
Universidad del Valle de México,
campus Lomas Verdes

Eduardo Enrique García
CETIS 5,
Centro de Estudios Tecnológicos Industrial
y de Servicio

***Matemáticas I*, primera edición**
Patricia Ibáñez Carrasco

Director Higher Education Latinoamérica:
Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:
Jesús Mares Chacón

Editor Senior Hardside:
Pablo Miguel Guerrero Rosas

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Anneli Daniela Torres Arroyo

Imágenes de portada:
@Shutterstock

Composición tipográfica:
Ediciones OVA

Datos para catalogación bibliográfica:

Carrasco Ibáñez, Patricia
Matemáticas I
Primera edición
ISBN: 978-607-526-629-9

Visite nuestro sitio web en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 20 19 18 17

CONTENIDO

Bloque I

Bloque 2

Bloque 3

Bloque 4

Bloque 5

Bloque 6

Bloque 7

PRESENTACIÓN

El presente libro Matemáticas I, de la autora Patricia Ibáñez se ha convertido en referencia de texto para estudiantes de nivel medio superior en las materias de aritmética y álgebra, ya que permite que el lector trabaje en las aplicaciones reales, combinando ejercicios, problemas y ejemplos que relacionan la teoría con la práctica matemática. Tiene un enfoque basado en competencias que puede utilizarse en distintos planes de estudio, o bien tomarlo como un marco de referencia.

AL ESTUDIANTE

Los autores de los libros viven con la esperanza de que alguien en realidad los lea. Al contrario de lo que usted podría creer, casi todo texto de matemáticas de nivel medio superior está escrito para usted y no para el profesor. Cierto es que los temas cubiertos en el texto se escogieron consultando a los profesores, ya que ellos toman la decisión acerca de si hay que usarlos en sus clases, pero todo lo escrito en él está dirigido directamente a usted, al estudiante. Entonces queremos invitarle —no, en realidad queremos pedirle— que ¡lea este libro de texto! Pero no lo haga como leería una novela; no debe leerlo rápido y no debe saltarse nada. Piense en este libro como un cuaderno de ejercicios. Creemos que las matemáticas siempre deberían ser estudiadas con lápiz y papel a la mano porque, muy probablemente, tendrá que trabajar los ejemplos y hacer los análisis. Lea —más bien, trabaje— todos los ejemplos de una sección antes de intentar cualquiera de los ejercicios. Los ejemplos se han diseñado para mostrar lo que consideramos son los aspectos más importantes de cada sección y, por tanto, muestran los procedimientos necesarios para trabajar la mayoría de los problemas de los conjuntos de ejercicios. Siempre les decimos a nuestros estudiantes que, cuando lean un ejemplo, tapen su solución e intenten trabajar primero en ella, comparar su respuesta con la solución dada y luego resolver cualquier diferencia.

Hemos tratado de incluir los pasos más importantes para cada ejemplo, pero si algo no es claro usted podría siempre intentar completar los detalles o pasos que faltan, y aquí es donde el papel y el lápiz entran otra vez. Puede que no sea fácil, pero es parte del proceso de aprendizaje. La acumulación de hechos seguidos por la lenta asimilación de la comprensión simplemente no se puede alcanzar sin trabajar arduamente. Recuerde que también puede revisar las matemáticas apropiadas de sus viejos libros de aritmética o pre álgebra.

En conclusión, le deseamos buena suerte y éxito. Esperamos que disfrute el libro y el curso que está por iniciar. Cuando éramos estudiantes en matemáticas, este curso fue uno de nuestros favoritos porque nos gustan las matemáticas que están conectadas con el mundo físico. Si tiene algún comentario o si encuentra algún error cuando lea o trabaje con éste, o si nos quiere hacer llegar una buena idea para mejorar el libro, por favor póngase en contacto con nosotros a través de nuestro editor en Cengage Learning

AL DOCENTE

En caso de que examine este texto por primera vez, Matemáticas I puede utilizarse para un curso de un semestre de aritmética y álgebra o bien un curso remedial para el ingreso al nivel medio superior.

Para un curso semestral, suponemos que los estudiantes han completado con éxito al menos un semestre de aritmética básica. Dado que usted está leyendo esto, sin duda ya ha examinado la tabla de contenidos para los temas que cubrirá.

Sentimos que hay suficiente material aquí para escoger y formar un curso a su gusto. El texto tiene un equilibrio razonable entre los métodos analíticos, cualitativos y cuantitativos en el estudio de los temas presentados. En cuanto a nuestra "filosofía", ésta es que un libro para estudiantes de nivel medio superior debería estar escrito considerando siempre la compresión del estudiante, lo que significa que el material debería estar presentado en una forma directa, legible y útil, considerando el nivel teórico compatible con la idea de un "primer curso".

A las personas familiarizadas con los textos anteriores de la autora nos gustaría mencionarles algunas de las mejoras hechas en esta edición:

Se han actualizado muchos conjuntos de ejercicios agregando nuevos problemas.
Algunos de estos problemas implican nuevos y que consideramos interesantes retos.

- Se han agregado comentarios, figuras y ejemplos adicionales a muchas secciones.
- En todo el libro se le he dado un mayor énfasis a los conceptos de matemáticas básicas y a las soluciones que implican razonamientos lógicos.

ACERCA DE LA AUTORA

Patricia Ibáñez Carrasco

Egresada de la Universidad Tecnológica de Puebla, Ingeniería en Tecnologías para la Automatización, Maestría en Docencia y desarrollo de competencias por parte del Centro Universitario CIFE y Maestría en Comunicación y tecnologías educativas por parte del Instituto Latinoamericano para la Comunicación Educativa (ILCE). En su amplia experiencia profesional ha sido docente, por 25 años, de Matemáticas, Informática y Física en el Colegio de Bachilleres del Estado de Puebla, facilitadora de cursos de Evaluación del aprendizaje por parte del Centro Universitario CIFE y, actualmente directora, por examen de promoción del Servicio Profesional Docente (SPD), del Plantel 13 de Colegio de Bachilleres del Estado de Puebla.

Así mismo, se ha desempeñado como Consultora externa de la Dirección General de Bachilleratos (DGB) para el desarrollo de programas basados en competencias laborales, elaboradora de programas de estudio de matemáticas e informática de nivel medio superior en la DGB para el Nuevo Modelo Educativo.

Actualmente, está Certificada como Evaluadora Nacional de Desempeño Docente por parte del Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE), participando en la calificación de docentes evaluados.

Ha impartido cursos sobre tópicos de matemáticas e informática, manejo de programas de estudio y manejo del libro de Matemáticas I para bachillerato. Es autora de los libros Matemáticas I, II, III, IV, V y VI, Informática I e Informática II publicados por Cengage Learning.

BLOQUE

I

Los números y las operaciones básicas

Propósito del bloque:

Resuelve problemas sobre fenómenos cotidianos, mediante procedimientos aritméticis eliguendo de manera crítica las alternativas de solución.

Competencias genéricas:

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Competencias disciplinares:

CDBM 2 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 3 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

Conocimientos

- Clasificación y propiedades de los números reales.
- Operaciones con números reales.

  -Leyes de los signos.
  -Leyes de los exponentes.
  -Jerarquía de operaciones.
  -Mínimo común múltiplo.
  -Máximo común divisor.

Habilidades

- Clasifica los números.
- Utiliza las propiedades de los números reales en operaciones aritméticas.
- Explica la solución de problemas aritméticos.

Actitudes

- Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimentos.
- Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.
- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

Aprendizajes esperados

- Argumenta procedimientos para resolver problemas aritmétcos presentes en su contexto.

Los números y las operaciones básicas

Clasificación y propiedades de los números reales

Los encantos de esta ciencia sublime, la matemática,
solo se revelan a aquellos que tienen el valor de sumergirse en ella.

Carl Friedrich Gauss

Podemos decir que los números son tan antiguos como la aparición del hombre en la Tierra. Probablemente, una vez que el hombre empezó a habitar en la Tierra fue necesario llevar un registro de lo que poseía o dejaba de poseer. Por ejemplo, al principio, cuando era nómada, necesitaba saber cuántas armas tenía, cuántos hombres y mujeres había en su clan, cuantas pieles tenía, etc. Después, cuando se volvió sedentario, tuvo la necesidad de saber cuántos animales poseía, cuántos arados, cuántos hijos, cuál era la extensión de sus tierras. En un principio este registro se llevó a cabo con métodos muy rudimentarios y diversos, tales como piedras en un costal o marcas en una tablilla de arcilla, métodos que en algún momento se volvieron obsoletos e inadecuados, pues el costal sería muy pesado y la tablilla de arcilla muy grande, razón por la cual las necesidades del registro cambiaron, se construyó un conjunto de símbolos para representar una cantidad, en ese momento surgieron los conceptos de dígitos. Algunas culturas como la egipcia y la romana tuvieron sistemas de numeración que no incluían al cero, la ausencia de cantidad, en la cultura maya, su sistema de numeración era tan avanzado que incluía al cero en sus dígitos.

La numeración arábiga es la base de la numeración decimal, misma que usamos actualmente, tiene 10 dígitos, del 0 al 9, tiene como base el número 10 y un sistema posicional basado en potencias del número 10 (unidades $= 10^0$, decenas $= 10^1$, etc.), que nos permiten representar números de cualquier extensión. Por otro lado, las operaciones que se pueden realizar con los números reales van desde las básicas hasta las más complejas, eso es lo que trataremos a lo largo de este primer bloque.

Actividades de aprendizaje

CG 5. 2 Ordena la información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

CG 8. 2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

I. En equipo de 4 integrantes, investiga bibliográfica o electrónicamente la definición de los siguientes conceptos: número, fracción, números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, leyes de los signos y jerarquía de operaciones. Cita al menos dos ejemplos de cada concepto y elabora un mapa mental con el material obtenido. Se calificará con la siguiente lista de cotejo.

Instrucciones. Su maestro les calificará, pero primero deben autoevaluar su trabajo, anotando su puntuación, los logros que han tenido y cuáles son sus áreas de oportunidad (errores u omisiones). Además, también permitirán que otro equipo (su maestro lo elegirá) les evalúe escribiendo lo mismo.

Núm.	Criterio de evaluación	Cumple (1 punto)	No cumple (0 puntos)
1.	El mapa contempla los aspectos principales del tema.		
2.	Se inicia desde el centro de la hoja colocando la idea central que está desarrollada hacia afuera de manera irradiante.		
3.	La idea central está representada con una imagen clara, poderosa y sintetiza el tema general del mapa mental.		
4.	Temas y subtemas están articulados y jerarquizados según el sentido de las manecillas del reloj.		
5.	Utiliza el espaciamiento para acomodar de manera equilibrada las ideas o subtemas.		
6.	Subraya las palabras clave o las encierra en un círculo.		
7.	Utiliza el color para diferenciar los temas, sus asociaciones o para resaltar algún contenido.		
8.	Utiliza flechas, iconos o cualquier elemento visual que permitan diferenciar y hacer más clara la relación entre ideas.		
9.	El mapa se puede leer fácilmente.		
10.	El mapa mental es creativo.		
		Calificación	
Autoevaluación:	Logros:	Áreas de oportunidad:	
Coevaluación:	Logros:	Áreas de oportunidad:	

Reflexionemos

II. Discute con tu maestro y con tu grupo cuáles serían las consecuencias de no contar con un sistema de numeración y con la falta de reglas necesarias para hacer operaciones.

Recordemos (Conocimientos previos)

III. Las siguientes preguntas te servirán como base para el inicio del tema:

1. ¿Qué es un número?
2. ¿Cómo se llaman los números que usamos para contar?
3. ¿Cómo se llaman los números que representan cantidades positivas y negativas enteras?
4. ¿Cuáles son los números que nos permiten representar una fracción?
5. ¿Cómo se denomina a la propiedad de los números reales que nos permite intercambiar el orden de los sumandos o los factores?

6. ¿Cómo se llama a la propiedad de los números reales que nos permite multiplicar por uno cualquier cantidad sin alterarla?
7. ¿Qué significado tiene el mínimo común múltiplo?
8. ¿Qué significado tiene el máximo común divisor?
9. ¿Cuáles son las leyes de los signos para la suma y la multiplicación?
10. ¿Qué representa la jerarquía de operaciones en los reales?

Clasificación de los números reales

Imaginemos cómo pudo haber hecho el hombre prehistórico una vez que se convirtió en sedentario y debía contar su rebaño. Probablemente, al principio fue fácil usar una lápida de piedra y colocar una rayita en esta por cada oveja, es decir, si eran 10 ovejas habría 10 rayitas, pero y si ¿eran 100 o 1000?, ¡creo que la piedra debía ser muy grande! Si eran nudos en una cuerda, esta debía ser muy extensa, entonces, ¿cómo hacerlo?, ¿cómo contar sus pertenencias de una manera práctica? Así, surgió la necesidad de representar cantidades, es decir, relacionar un símbolo con una cantidad, esos símbolos son los números. Los primeros números surgieron de la necesidad natural de contar, se denominan **números naturales** y están representados por una $\mathbb{N}$. Ya los conoces, son los que empleas para contar tus cuadernos, tus amigos, etcétera.

Los números naturales tienen un orden, es decir, se establece cuál es mayor y cuál menor que otro. Así pues, el 1 es menor que 2, el 2 menor que 3 y así sucesivamente; pero también el 4 es mayor que el 3, el 3 mayor que el 2 y así subsecuentemente.

Para representar estas relaciones se diseñaron los símbolos: $>$ (mayor que) y $<$ (menor que). Hablando matemáticamente tendremos que el $2 < 3$ y $4 > 3$. Solo es cuestión de cambiar las palabras por el símbolo correspondiente. Las relaciones establecidas se representan gráficamente de la siguiente manera:

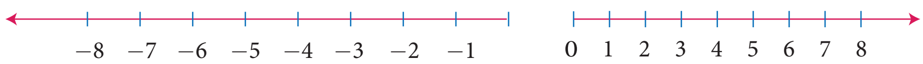
¡Claro!, se inicia la recta numérica y con este conjunto de números también aparecen operaciones como la suma y la multiplicación, con la restricción de que el resultado de ellas debe ser un número de este mismo co njunto, por ejemplo:

$$5 + 4 = 9 \qquad \text{o} \qquad 6 \times 7 = 42$$

Pero esto no es todo, la historia continúa. Supongamos que una extraña enfermedad afecta a un rebaño y al final extermina a todas las ovejas. La ausencia de cantidad se representa con el número cero y además, se coloca como el primer número, o el menor de todos. Representado en la recta numérica quedaría así:

En este momento de la historia podemos contar desde el cero hasta donde se desee, de hecho no hay límite y se dice que este conjunto de números es infinito y se denominan **enteros positivos**. Los enteros positivos se representan con $\mathbb{Z}$.

Obviamente, tenemos los números que sumados con los enteros positivos dan cero, a estos se les llama enteros negativos y son simétricos a los positivos pues se encuentran a la misma dist ancia del cero. Los **enteros positivos** junto con los enteros negativos se denominan enteros y se representan con el signo $\mathbb{Z}$. La recta númerica ahora toma esta forma:



Entre los usos más importantes de los números enteros están:

a) La representación de temperaturas sobre y bajo cero.
b) La representación de altitudes sobre y bajo el nivel del mar.
c) La representación de los años después y antes de Cristo.
d) La representación del ascenso y descenso de pisos en un elevador.

Además, los números que se encuentran entre los enteros se denominan racionales o fraccionarios y se representan con ($\mathbb{Q}$), incluyen a todos los números que se pueden representar como una división o razón, de la forma:

$$\frac{p}{q},\ q \neq 0$$

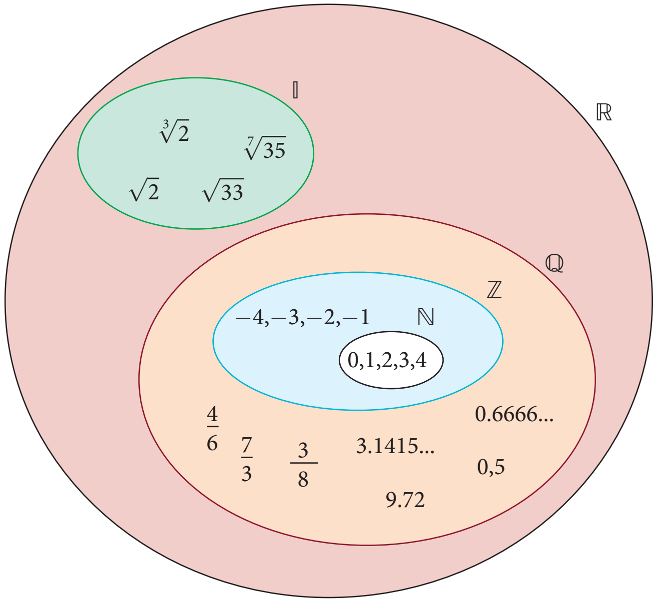
Ejemplos de números fraccionarios $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}$.

Los enteros forman parte de los racionales pues cada entero está dividido por uno, por ejemplo:

$$\frac{5}{1}, \frac{1\ 2}{1}, \frac{1\ 2\ 3\ 4}{1}, \ldots \text{ etcétera.}$$

Hay números que se encuentran fuera de estos grupos de números, se les denomina irracionales pues no tienen una representación fraccionaria o racional posible. Entre estos se encuentra los números $\prod$ y $\sqrt{2}$. Este conjunto de números se representa con la letra I.

Tomando en consideración que un conjunto es una agrupación de elementos que comparten una característica. Tenemos entonces, el conjunto de los números naturales, enteros, racionales e irracionales que se reúnen bajo el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ y gráficamente se ven así:



$\mathbb{N}$ = Números naturales (enteros positivos)
$\mathbb{Z}$ = Números enteros (positivos y negativos)
$\mathbb{Q}$ = Números racionales(fracciones y decimales)
$\mathbb{I}$ = Irracionales

Comprueba el desarrollo de tu competencia:

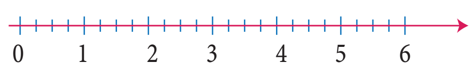
CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

CDBM 3 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

I. En parejas realiza los siguientes ejercicios y comenta con el grupo cuál fue el proceso para obtener tus respuestas. De los siguientes números indica a qué conjuntos numéricos pertenecen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$), observa el ejemplo:

1. $6 \rightarrow \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$
2. $\frac{1}{2} \rightarrow$
3. $\sqrt{5} \rightarrow$
4. $-8 \rightarrow$
5. $-4.25 \rightarrow$
6. $\sqrt{2} \rightarrow$
7. $2.101101110\ldots \rightarrow$
8. $\prod \rightarrow$
9. $\frac{-1}{5}$
10. Localiza en la recta numérica los siguientes números, colocando un punto sobre cada ubicación: 4.25, 5.5, 2.75, 3, 4.5, 1.25, 6.75.



II. Tomando en cuenta la recta numérica anterior calcula:

11. Dos números consecutivos después del 5 son: ____________________ y ____________________.

12. Dos números pares consecutivos después del 6 son: ____________________ y ____________________.

13. Dos números impares consecutivos después del 9 son: ____________________ y ____________________.

14. Dos fracciones entre 0 y 1 son: ____________________ y ____________________.

15. Dos fracciones entre 3 y 4 son: ____________________ y ____________________.

16. En la siguiente figura, ¿Cuánto mide GH si se sabe que $FJ = 90$, $FH = 45$ y $GJ = 75$?

17. En la siguiente recta $PG = 15$. Halla la medida del punto medio:

18. En la siguiente figura, ¿Cuánto mide la tercera parte de la suma de los segmentos FG y HJ si se sabe que $FG = 100$ y $HJ = 90$?

19. En la siguiente figura $AD = 160$, $AC = 100$, y $BD = 110$, ¿cuánto miden las tres cuartas partes del segmento BC?

III. Escribe cada enunciado mediante un número entero (positivo o negativo):

20. Diana debe 200 pesos en la tienda: ________________________________

21. Un tiburón está a 20 metros bajo el nivel del mar: ________________________________

22. La temperatura en la sierra es 5 °C bajo cero: ________________________________

23. Aristóteles nació 384 años antes de la era cristiana: ________________________________

24. Eduardo tiene en el banco 2500 pesos: ________________________________

25. Martha trabaja en el noveno piso:________________________________

26. El automóvil está estacionado en el tercer sótano: ________________________________

27. El termómetro marca 33 °C sobre cero: ________________________________

28. Tengo un billete de 100 pesos: ________________________________

29. Anahí debe 20 pesos a un amigo: ________________________________

Propiedades de los números reales

Si a, b y c son números reales, se verifican las siguientes propiedades:

1. **Cerradura.** Si se suman, restan, multiplican o dividen dos números reales se obtendrá como resultado otro número real.

2. **Asociatividad de la suma y el producto.** La propiedad asociativa nos permite "juntar" con signos de agrupación, dos términos de una operación que incluye solo sumas o multiplicaciones (producto).

Operación	Propiedad	Ejemplo
Suma	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(3+5)+4=3+(5+4)$
Producto	$(ab)c=a(bc)$	$(3\times 5)4=3(5\times 4)$

3. **Conmutatividad de la suma y el producto.** La propiedad conmutativa nos permite cambiar (conmutar) de lugar los términos de una suma o producto.

Operación	Propiedad	Ejemplo
Suma	$a+b=b+a$	$3+5=5+3$
Producto	$ab=ab$	$3\times 5=5\times 3$

4. **Neutro aditivo.** Es el número que sumado a cualquier cantidad no la altera, en el caso de la suma es el cero.

Operación	Propiedad	Ejemplo
Suma	$a+0=a$	$3+0=3$

5. **Neutro multiplicativo.** Es el número que multiplicado por cualquier cantidad no la altera, en el caso del producto es el uno.

Operación	Propiedad	Ejemplo
Producto	$a\times 1=a$	$3\times 1=3$

Nota: Observa que si multiplicaras por cero tendrías como resultado cero, entonces no hay que confundir el neutro aditivo con el multiplicativo y viceversa.

6. **Inverso aditivo.** Para todo número real, existe un único número, que notaremos con $(-a)$.

Operación	Propiedad	Ejemplo
Suma	$a+(-a)=0$	$3+(-3)=0$

Observa que la suma de inversos aditivos nos da como resultado el neutro aditivo.

7. **Inverso multiplicativo.** Para todo número real, distinto de cero, existe un único número real, que notaremos con , denominado inverso multiplicativo o recíproco.

Operación	Propiedad	Ejemplo
Producto	$a \times \frac{1}{a} = 1$	$3 + (-3) = 0$

8. **Distributividad del producto con respecto a la suma**. El producto se puede distribuir en una suma.

Operación	Propiedad	Ejemplo
Producto y suma	$a(b + c) = ab + ac$	$3(4 + 5) = (3)(4) + (3)(5)$

La utilidad de estas propiedades se visualiza al hacer despejes, lo cual se verá más adelante.

Comprueba el desarrollo de tu competencia:

I. En un equipo de 4 integrantes, justifica cada una de las siguientes proposiciones colocando la propiedad de los números reales que se ilustra. Reflexiona sobre el proceso de solución y mantén una actitud respetuosa y tolerante.

1. $5 + 0 = 5$ ______
2. $6 \times 5 = 5 \times 6$ ______
3. $4(1) = 4$ ______
4. $8 + 10 = 10 + 8$ ______
5. $0 + 7 = 7$ ______
6. $6(4 + 3) = (6)(4) + (6)(3)$ ______
7. $7\left(\frac{1}{7}\right) = 1$ ______
8. $9 + -9 = 0$ ______
9. $121(1) = 121$ ______
10. $\frac{1}{10} \times 10 = 1$ ______
11. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ ______

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

CDBM 2 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

BLOQUE III

Sucesiones y series

Propósito del bloque:

Resuelve modelos aritméticos, algebraicos y gráficos basándose en el reconocimiento de patrones para relacionar magnitudes constantes y variables de un fenómeno social o natural.

Competencias genéricas:

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG. 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

Competencias disciplinares:

CDBM 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

CDBM 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Conocimientos

- Búsqueda de patrones.
- Sucesiones y series.
  - Aritméticas.
  - Geométricas.

Habilidades

- Calcula valores de series aritméticas y geométricas.
- Deduce valores faltantes en sucesiones aritméticas y geométricas.
- Infiere patrones numéricos y gráficos de sucesiones aritméticas y geométricas.

Actitudes

- Explica regularidades de sucesiones, siendo perseverante en la búsqueda de patrones.
- Resuelve colaborativamente e interpreta problemas reales o hipotéticos que presentan relación con sucesiones y series para modelar distintos fenómenos.

Aprendizajes esperados:

- Explica regularidades de sucesiones, siendo perseverante en la búsqueda de patrones que se encuentran en su entorno.
- Resuelve colaborativamente e interpreta problemas reales o hipotéticos que presentan relación con sucesiones y series para modelar distintos fenómenos de su localidad.

Las matemáticas son el alfabeto
con el cual Dios ha escrito el Universo.

Galileo Galilei

Este bloque se basa en el estudio de las regularidades lo que nos ayuda a encontrar patrones. Con el establecimiento de las regularidades podemos identificar diferencias y similitudes, categorizar objetos y determinados eventos; sin duda las regularidades se presentan en nuestra vida cotidiana como sucesiones.

Las sucesiones tienen aplicaciones prácticas en nuestra vida cotidiana como en los siguientes ejemplos:

a) La forma de calcular los intereses de nuestros ahorros o cuando depositamos dinero en el banco con interés compuesto.
b) La forma de reproducción de los conejos regida por una sucesión muy famosa desarrollada por Fibonacci.
c) En las industrias para la producción en serie de autos.
d) En la descripción del crecimiento de los girasoles.
e) Para describir el proceso de clavar un clavo.

Es un tema muy interesante, se tiene conocimiento de que las sucesiones son tan antiguas como los números naturales, existen registros de que las tribus antiguas ordenaban sus festividades tan cuidadosamente que daban origen a una sucesión.

Actividad introductoria

CG 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

En equipo de 4 integrantes investiga bibliográfica o electrónicamente la definición de los siguientes conceptos: patrón, serie, sucesión. Cita al menos dos ejemplos de cada uno y elabora un cuadro sinóptico con el material obtenido. Se calificará con la siguiente lista de cotejo.

Instrucciones. Su maestro les calificará, pero primero deben autoevaluar su trabajo, anotando su puntuación, los logros que han tenido y cuáles son sus áreas de oportunidad (errores u omisiones). Además, también permitirán que otro equipo (su maestro lo elegirá) les evalúe escribiendo lo mismo.

Núm.	Criterio de evaluación	Cumple (1 punto)	No cumple (0 puntos)
1.	El cuadro sinóptico contempla los aspectos principales del tema.		
2.	Incluye todos los conceptos importantes que representa la información principal del tema.		
3.	Presenta estructura jerárquica horizontal completa y equilibrada, con una organización clara y de fácil interpretación.		
4.	Temas y subtemas están presentes y definidos.		

5.	Utiliza el espaciamiento para acomodar de manera equilibrada las ideas o subtemas.		
6.	Subraya las palabras clave.		
7.	Utiliza las llaves como auxiliar visual para llamar la atención sobre los elementos principales.		
8.	No presenta faltas de ortografía.		
9.	El cuadro se puede leer fácilmente, es ordenado.		
10.	El cuadro se entrega en tiempo y forma.		
		Calificación	

Autoevaluación:	Logros:	Áreas de oportunidad:
Coevaluación:	Logros:	Áreas de oportunidad:

Reflexionemos

Discute con tu maestro y con tu grupo cuáles son los principales usos de las series y sucesiones en su vida cotidiana.

Recordemos (Conocimientos previos)

Las siguientes preguntas te serviran como base para el inicio del tema.

1. ¿Qué entiendes por patrón, o regularidad matemática, en un evento?
2. ¿Cómo describes una sucesión?
3. ¿Cuántos tipos de sucesiones has escuchado que existen?
4. ¿Cuál es la principal característica de una sucesión?
5. ¿Cómo describes una serie matemática?
6. ¿Cuántos tipos de series conoces?
7. ¿Cuál crees que es la principal característica de una serie?
8. Escribe un ejemplo de aplicación de las sucesiones o series

Búsqueda de patrones

Definición de patrón

Un **patrón** es una sucesión de objetos o sucesos que se construyen siguiendo una regla, ya sea de repetición o de recurrencia. Los patrones se encuentran en las tablas de multiplicar, en mosaicos, sistemas de numeración, etcétera.

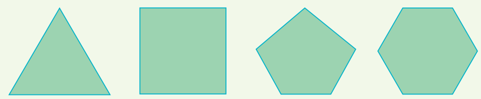
En los ejercicios de regularidades numéricas se trata de encontrar cuál es el patrón o regla de formación de una sucesión.

La sucesión puede estar dada en el contexto geométrico o mediante una relación matemática.

En un contexto geométrico

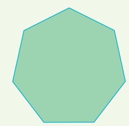
Ejemplo:

¿Cuál es la figura que sigue?



Solución:

Observa que cada figura tiene un lado más que el anterior, así que la figura que sigue es el heptágono.



Mediante relaciones numéricas

Ejemplo:

¿Cuál es el número que sigue? 0, 3, 6, 9, 12, 15…

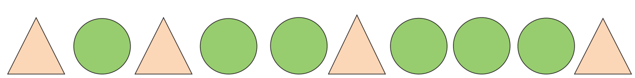
Solución:

De la observación concluimos que el patrón es la tabla del 3, por lo tanto el número que sigue es 18.

Comprueba el desarrollo de tu competencia:

I. En pareja, descubre el patrón y escribe los cinco números que continúan.

1. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,…
2. 4, 6, 8, 10, 12, 14,…
3. 1, 2, 4, 7, 11, 16,…
4. 1, 4, 9, 16, 25,…
5. 2, 4, 8, 16, 32, 64,…
6. 1, 2, 3, 5, 8, 13,…
7. Continúa con el patrón hasta tener 8 círculos verdes.



8. Andrea prepara una pulsera y utiliza cuentas negras y blancas, coloca 5 blancas y dos negras. Por la longitud de la pulsera, ella calcula que necesitará 10 cuentas negras, ¿cuántas cuentas blancas necesitará?

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

CG. 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

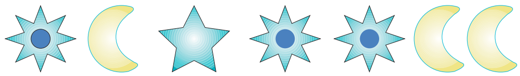
CDBM 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

(Continúa)

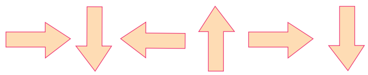
(Continuación)

CDBM 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

9. Dibuja las diez formas que siguen en el patrón.



10. ¿Cuál es la duodécima figura en el siguiente patrón?



11. Una profesora colocó en una fila 3 niñas, después 3 niños, luego 3 niñas, quien queda en el lugar 20, ¿es niña o niño?

Sucesiones

Una sucesión es un conjunto de números escritos en un orden específico.

Ejemplo:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n,}$ donde,
a_1 es el primer término,
a_2 es el primer término,
a_3 es el tercer término,
a_n es el n-ésimo término.

Una sucesión se puede escribir de dos formas:

a) Listando algunos de sus ejemplos.
b) Con la fórmula del término n-ésimo.

Se listan los términos de la sucesión cuando es claro cuáles son los números y su relación. Por ejemplo:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$$

Es claro que es una sucesión de números impares.

La segunda forma de representar una sucesión se emplea para dar mayor exactitud cuando se quieren calcular los términos de la función. Por ejemplo la sucesión anterior se representa por:

$$a_n = 2n - 1$$

La sucesión se escribe como sigue:

$2(1) - 1 = 1$	$2(2) - 1 = 3$	$2(3) - 1 = 5$	$2n - 1$
Primer término	Segundo término	Tercer término	n-ésimo término

Los puntos indican que la sucesión sigue indefinidamente y la fórmula nos permite obtener todos los términos de la sucesión sustituyendo n por un número natural, es decir, 1, 2, 3, 4, etcétera.

Las sucesiones pueden ser de dos tipos, aritméticas y geométricas.

Sucesiones aritméticas

Una sucesión aritmética se define como aquella en la que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante. Las sucesiones trabajan sobre los números naturales, pero el resultado es un número real.

El término general de una sucesión aritmética se calcula con la fórmula:

$$an + b$$

Donde,
a y b son constantes y a es la diferencia entre un término y el anterior. Así como n es el número del término deseado.

Esta fórmula es útil cuando se dan algunos términos de la sucesión y se debe calcular la expresión algebraica del término n-ésimo.

Ejemplo 1:

Calcula la expresión algebraica general de la sucesión 1, 3, 5, 7, 9…

Solución:

Observa que la diferencia entre cada término es 2, por lo tanto la expresión puede iniciar como $2n$. Para determinar cuánto valdría b calculemos a partir de alguno de los términos:

$$\begin{aligned} 2n + b &= 3 \textit{ observa que es el segundo término, entonces } n = 2 \\ 2(2) + b &= 3 \\ 4 + b &= 3 \\ b &= 3 - 4 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Entonces la expresión general será $a_n = 2n - 1$.

La suma de n términos de la sucesión se calcula con la fórmula:

$$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+\ldots+(na+b)=\frac{a}{2}n(n+1)+bn$$

Ejemplo 2:

Dada la sucesión 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26,…

a) Calcula el término 20 de la sucesión.
b) Calcula la suma de los primeros 10 términos de la sucesión.

Solución:

Primero debemos calcular las constantes a y b. La diferencia entre cualquier par de términos es 3, entonces $a = 3$. El término general va tomando la siguiente forma $3n + b$.

Para calcular el valor b utilizamos el primer término, en donde $n = 1$, entonces,

$$\begin{aligned} 3(1)+b&=8\\ b&=8-3\\ b&=5 \end{aligned}$$

Por tanto, el término general de la sucesión es: $3n + 5$.

Una vez hecho esto calcularemos el término 20 de la sucesión,

$$3(20) + 5 = 65$$

Tenemos entonces que el valor que nos piden es 65.

Para calcular la suma de los primeros 10 tenemos que sustituir los valores $a = 3$, $b = 5$ y $n = 10$ en:

$$\frac{a}{2}n(n+1)+bn=\frac{3}{2}10(10+1)+5(10)=215$$

Conclusión:

El término 20 de la sucesión es 65 y la suma de los primeros 10 términos de la sucesión es 215.

Ejemplo 3:

Dada la sucesión: $-13, -19, -25, -31, -43, -49, -55,\ldots$

a) Calcula el décimo término.
b) Calcula la suma de los primeros 20 términos de la sucesión.

Solución:

Primero debemos calcular los valores de a y b. Tenemos que la diferencia entre términos es -6, por tanto, la forma que irá tomando el término general es $-6n + b$.

Por otro lado el valor de b se puede calcular utilizando el primer término donde $n =1$
Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned} -6(1)+b&=-13\\ b&=-13+6\\ b&=-7 \end{aligned}$$

Por tanto, el término general de la sucesión es $-6n - 7$.

Para calcular el término 10 de la sucesión debemos sustituir n en la fórmula anterior,

$$\begin{aligned} &-6(10)-7\\ &-60-7\\ &-67 \end{aligned}$$

Entonces el término 10 de la sucesión es -67.

Para calcular la suma de los primeros 20 términos de la sucesión sustituimos los datos $a = -6$, $b = -7$ y $n = 20$ en la fórmula:

$$\frac{a}{2}n(n+1)+bn=\frac{-6}{2}20(20+1)+(-7)20=-1400$$

Conclusión:

La suma de los primeros 20 términos de la sucesión es 1400.

El término 10 de la sucesión es -67 y la suma de los primeros 20 términos es 1400.

Ejemplo 4:

Una carpa de circo debe ser asegurada al suelo por medio de cuerdas muy gruesas amarradas a estacas clavadas en el suelo. Cada estaca mide aproximadamente 75 cm. Las estacas deben introducirse en $\frac{2}{3}$ partes de su longitud para garantizar la seguridad de la estructura. Con el primer golpe la estaca introduce 50 mm y con el segundo 45 mm. Si suponemos que la estaca se introduce en el suelo siguiendo una secuencia aritmética. Calcula cuánto se ha introducido en el décimo golpe.

Solución:

Primero encontramos la diferencia entre términos sucesivos: $45 - 50 = -5$ esto es el valor de $a = -5$, el término general va tomando la forma: $-5n + b$.

Para calcular b podemos usar el primer término con $n = 1$ y sustituirlo,

$$\begin{aligned} -5(1)+b&=50 \\ b&=50+5 \\ b&=55 \end{aligned}$$

Entonces el término general es: $-5n + 55$,

Para calcular cuánto ha penetrado al décimo golpe sustituimos $n = 10$ en la fórmula,

$$\frac{a}{2}n(n+1)+bn=\frac{-5}{2}10(10+1)+(55)10=-25(11)+550=275$$

Conclusión:

En total al décimo golpe la estaca se ha clavado 275 mm (27.5 cm).

Sucesiones geométricas

Una sucesión geométrica se define como aquella en la que el cociente entre dos términos consecutivos es una constante.

La fórmula para el término general de una sucesión geométrica es:

$$a \cdot r^{n-1},$$

donde a y r son constantes, r es el cociente entre un término y el anterior. El número del término deseado es n.

Para calcular la suma de n términos de la sucesión geométrica:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejemplo 1:

Dada la sucesión: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192…

a) Calcula el décimo término de la sucesión.
b) Calcula la suma de los primeros 20 términos.

Solución:

El cociente o división entre dos términos consecutivos de la sucesión es $r = 2$, entonces la forma del término general sería: $a2^{n-1}$.

Para encontrar el valor de a podemos utilizar el primer término, en donde $n = 1$,

$$a2^0 = 3$$
$$2^0 = 1$$

se deduce que $a = 3$.

De aquí tenemos que el término general de la sucesión es:

$$(3)2^{n-1}$$

Para encontrar el décimo término de la sucesión, sustituimos 10 en la fórmula anterior:

$$(3)\ 2^{10-1} = (3)\ 2^9 = 1536$$

El término 10 de la sucesión es 1536.

Para calcular la suma de los primeros 20 términos de esta sucesión sustituimos los datos $a = 3$, $r = 2$ y $n = 10$ en la fórmula,

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{3(1024 - 1)}{1} = \frac{3(1023)}{1} = 3069$$

El resultado es 3069.

Conclusión:

El término 10 de la sucesión es 1536.
La suma de los primeros 20 términos de la sucesión es 3069.

Ejemplo 2:

Dada la sucesión: 0.5, -1.5, 4.5, -13.5, 40.5, -121.5, 364.5,…

a) Calcula el término 12º de la sucesión.
b) Calcula la suma de los primeros 20 términos.

Solución:

Para calcular los valores de r realizamos el cociente entre dos términos consecutivos y el resultado es -3.

Por tanto, $r = -3$ el término general, tomaría la forma:

$$a\,(-3)^{n-1}.$$

Para calcular el valor de a usamos el primer término, donde $n = 1$; sustituyendo en la fórmula obtenemos,

$$a\,(-3)^{1-1}$$
$$a\,(-3)^{0} = 0.5$$

Como $(-3)^0 = 1$, se deduce que $a = 0.5$, el término general toma la forma,

$$0.5\,(-3)^{n-1}$$

Observa que si el valor de r es negativo, los términos alternan entre positivo, negativo, positivo, etc. Ahora para calcular el valor del 12º término de la sucesión, debemos tomar $n = 12$.

$$0.5\,(-3)^{12-1} =$$
$$0.5\,(-3)^{11} =$$
$$0.5\,(-177147) = -88573.5$$

Para encontrar la suma de los primeros 20 términos de la sucesión utilizamos la fórmula:

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{0.5(-3^{20}-1)}{-3-1} = 435\ 848\ 050$$

Conclusión:

El 12º término de la sucesión es: -88573.

La suma de los primeros 20 términos de la sucesión es 435 848 050.

Ejemplo 3:

Supongamos que el cabello humano crece 3 milímetros por día, además, el incremento de cada día es igual a 0.98 del incremento del día anterior. ¿Cuál será el incremento total al final del día 20?

Solución:

Del problema obtenemos que $r = 0.98$, de modo que el término general es: $a\,0.98^{n-1}$.

Para calcular el valor de a sustituimos $n = 1$ en el primer término:

$$a \cdot 0.98^{1-1} = 3$$
$$a = 3$$

Tenemos entonces que el término general es: 3 (0.98^{n-1}).

El cálculo del crecimiento total al final del día 20, sustituimos $a = 3$, $r = 0.98$ y $n = 20$ en la fórmula:

$$\frac{3(0.98^{20}-1)}{0.98-1} = 49.58 \text{ mm}$$

Conclusión:

El crecimiento total del cabello al final del día 20 es 49.58 milímetros.

Series

Una serie se define como una sucesión que se forma por la suma de los términos de otra sucesión. Podemos encontrar series aritméticas y series geométricas.

Serie aritmética

Si la serie se forma de una sucesión aritmética, entonces esa serie es aritmética, por ejemplo $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots$, viene de la sucesión aritmética 2, 4, 6, 8, 10,…, donde $a = 2$ y $b = 0$.

La suma de n términos de una serie aritmética se calcula con la fórmula:

$$s_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)b\right]$$

Solo se suman hasta n términos de la serie. la suma infinita de una serie aritmética no existe.

Con frecuencia es útil graficar una sucesión. La gráfica se puede realizar indicando los puntos en un plano cartesiano, donde en el eje X irán los valores de n que son números naturales y en Y los valores de la serie.

La gráfica de toda sucesión consta de puntos aislados que no están conectados.

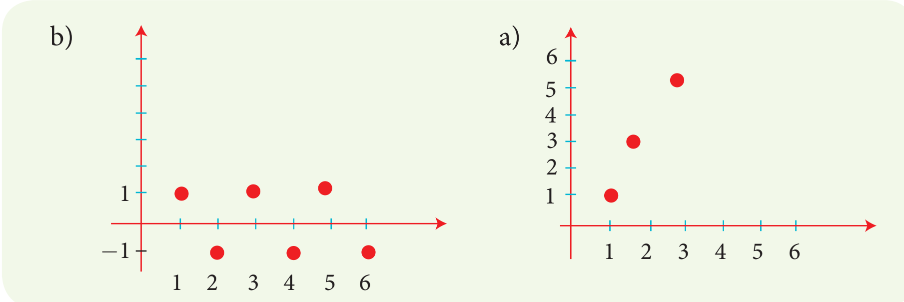
Ejemplo:

Grafica las siguientes sucesiones:

a) 1, 3, 5, 7, 9,…
b) 1, -1, 1, -1, 1,… no es monótona

Solución:

Gráficamente tenemos que las sucesiones son una serie de puntos sin conexión, entonces nuestras sucesiones quedarán así:



Serie geométrica

Una serie es geométrica si viene de una sucesión geométrica, por ejemplo:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ viene de la sucesión geométrica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\ldots$, donde $a = 1$ y $r=\frac{1}{2}$.

La suma de n términos de una serie geométrica se calcula con la fórmula:

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r}$$

Solo se suman hasta n términos de la serie. La suma infinita de una serie geométrica no existe.

Otros ejemplos de sucesiones

Hasta ahora sabemos que una sucesión es un conjunto de números ordenados, generalmente de menor a mayor, de manera tal que uno de ellos se ubica en primer lugar y es el valor mínimo, otro es el segundo, otro el tercero y así sucesivamente hasta el término enésimo que es el valor máximo.

Ahora veremos varios tipos de sucesiones, todas tienen un patrón o regla que se respeta, solo es necesario poner atención para comprender.

1. Sucesiones que presentan la misma diferencia entre sus elementos, por ejemplo: 1, 3, 5, 7, 9, 11. La diferencia entre cada elemento es 2, por tanto el número que sigue es 13.
2. Sucesiones que presentan diferencias distintas entre cada elemento, por ejemplo: 14, 27, 42, 59, 78. Para resolver este tipo de sucesiones primero escribe todos sus elementos y verifica la diferencia entre un número y otro:

$$14, \; 27, \; 42, \; 59, \; 78$$
$$13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$$

La diferencia crece de 2 en 2, entonces el número que da continuidad a la sucesión a partir del 78 está veintiún números adelante o sea, en el 99, ¿crees que es sencillo?

3. Otro tipo de sucesiones es aquella donde el sucesor y el antecesor tienen una relación, por ejemplo:

Naturales

2, 1, 4, 2, 6 3, 8, 4, 10…

Pares

Si observas con atención el patrón anterior, descubrirás que el número siguiente es 5.

4. Hay dos tipos de suceciones que presentan este tipo de patrón:

a) Los que siguen el mismo patrón en toda la sucesión:

1, 4, 7, 10, 13 16, 19, 21

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

Para encontrar el número que sigue en la sucesión, debes encontrar la regla, en este caso es,

$$
\begin{array}{ll}
1+3=4, & 4+3=7 \\
7+3=10, & 10+3=13 \\
13+3=16, & 16+3=19 \\
19+3=21 &
\end{array}
$$

Por tanto el número que sigue es: 21+3= 24.

b) Los que tiene patrón alternado:

1, 4, 2, 5, 3 6, 4, 7, 5…

+3 −2 +3 −2 +3 −2 +3 −2

La regla en esta sucesión es,

$$
\begin{array}{ll}
1+3=4, & 4-2=2 \\
2+3=5, & 5-2=3 \\
3+3=6, & 6-2=4 \\
4+3=7, & 7-2=5
\end{array}
$$

El número que sigue es: $5 + 3 = 8$.

5. Los que tienen alternado el patrón con multiplicaciones y divisiones:

1, 4, 2, 8, 4 16, 8, 32…

×4 ÷2 ×4 ÷2 ×4 ÷2 ×4

Aquí la regla de la sucesión es:

$$
\begin{array}{ll}
1\times 4=4, & 4\div 2=2 \\
2\times 4=8, & 8\div 2=4 \\
4\times 4=16, & 16\div 2=8 \\
8\times 4=32 &
\end{array}
$$

El término que sigue es: $32 \div 2 = 16$.

Estas sucesiones también se pueden graficar como una serie de punto sin conexión alguna.

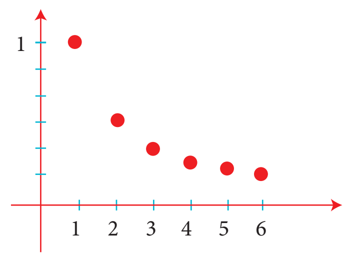
Ejemplo:

Grafica los primeros cinco términos de la serie: $a_n = \dfrac{1}{n}$

Solución:

Los primeros 6 términos son: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}\ldots$

Su gráfica sería la siguiente:



Comprueba el desarrollo de tu competencia:

CG. 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.

CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

CDBM 1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

CDBM 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

I. En equipo de cuatro integrantes, encuentra la expresión algebraica para el *n*-ésimo término, obtén el resultado de la suma de los primeros 10 términos y elabora la gráfica de cada una de las siguientes sucesiones.

1. 10, 1, 9, 2, 8, 3… ____________________
2. 38, 30, 36, 30, 34, 30… ____________________
3. 58, 50, 56, 40, 54, 30… ____________________
4. 2, 5, 8, 11, 14, 17… ____________________
5. 710, 706, 702, 698, 694, 690… ____________________
6. 490, 245, 980, 122.50, 1960, 61.25… ____________________
7. 24, 21, 24, 27, 24, 18… ____________________
8. 24, 21, 27, 18, 30, 12… ____________________
9. 18, 36, 54, 72, 90, 108… ____________________
10. 2, 4, 12, 48, 240, 1440… ____________________

Matemáticas I

Esta edición de ***Matemáticas I*** tiene como finalidad contribuir a incrementar el nivel de eficacia y eficiencia del proceso educativo y facilitar el trabajo docente mediante la incorporación de actividades de aprendizaje que contribuyan al desarrollo de competencias y habilidades socioemocionales, todo ello desde un enfoque interdisciplinario y de transversalidad.

Entre las características del libro, destacan las siguientes:

- Presenta los temas de los números y las operaciones básicas, razones y proporciones, sucesiones y series, modelos de probabilidad y estadística, operaciones algebraicas, ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas.
- Incorpora secuencias didácticas prácticas que sugieren el uso de herramientas tecnológicas de información y comunicación (TIC), así como instrumentos de evaluación para el seguimiento sencillo y ordenado del desempeño escolar.
- Contiene información relevante para adentrarse en la práctica matemática, lo que permite fortalecer habilidades, destrezas y actitudes para desarrollar y resolver problemas reales.
- Considera abordar el conocimiento y articularlo de manera plural con las habilidades y actitudes que permitan generar a la par evidencias de aprendizaje.
- En el desarrollo de la obra se consideró la valiosa opinión de docentes y egresados del bachillerato, así como interesantes expectativas de estudiantes acerca de cómo debía ser el formato ideal de un libro de texto para el curso.
- Favorece que el estudiante adquiera no sólo conocimientos nuevos (*saber*), sino que aprenda a aprender (*saber hacer*) y aprenda que puede aprender (*saber ser*) para beneficio propio y de los demás (*saber convivir*).

ISBN-13: 978-607-526-629-9
ISBN-10: 607-526-629-1

CENGAGE